

Karakteristik Komputasi Penentuan Akar Kuadrat Bilangan Nonkuadrat Sempurna Beberapa Metode Iteratif Menggunakan Pemrograman QBasic

Endaryono

Program Studi Informatika, Universitas Indraprasta PGRI, Indonesia
endaryono@unindra.ac.id

Abstrak

Penyelesaian beberapa masalah matematika tidak hanya menggunakan metode analitik tetapi juga dengan metode numerik yang prosesnya iteratif. Dalam metode numerik, selain mahasiswa memahami perhitungan tiap iterasi secara manual juga perlu untuk memahami penyelesaian menggunakan *coding* atau pemrograman. Satu diantara program yang mudah diunduh adalah QBasic. Tulisan ini membahas penentuan akar bilangan bulat yang bukan bilangan kuadrat sempurna yaitu akar kuadrat dari 3 menggunakan metode numerik dengan teknik iteratif. Tujuan penulisan adalah melihat karakteristik komputasi dalam jumlah iterasi pada metode Heron, bagi dua, posisi palsu, dan Newton Raphson. Penelitian melalui simulasi menggunakan pemrograman QBasic. Nilai kesalahan (error) dalam simulasi pada metode yang dilakukan ditetapkan pada nilai 1×10^{-10} atau iterasi masih akan jika nilai kesalahan lebih dari nilai kesalahan yang ditetapkan. Hasil simulasi didapatkan bahwa pada nilai kesalahan tersebut nilai akar kuadrat bilangan 3 berkisar pada 1,73205. Metode Heron dan metode Newton Raphson memiliki jumlah iterasi yang sama, yaitu 6 iterasi, relatif lebih sedikit dibandingkan metode iteratif lain. Kesimpulan penelitian adalah pada penentuan akar kuadrat dari bilangan 3 metode Heron dan metode Newton Raphson memberikan kinerja komputasi yang lebih baik dari jumlah iterasi dibanding pada metode bagi dua dan metode posisi palsu.

Kata kunci: metode analitik, akar kuadrat nonrasional, iteratif, QBasic.

Abstract

The completion of some mathematics problem not only used analytic methods but also by iterative processes through numerical methods. In numerical methods, besides students understood the calculation each iteration manually but also was necessary to understand the completion using coding or programming. QBasic is one program was easily downloaded. This paper discusses the determination of integer roots that are not perfect square numbers, namely a square root of 3 using numerical methods with iterative techniques. The purpose of writing is to look at computational characteristics in number iterations of Heron method, for two, false positions, and Newton Raphson. Research through simulations using QBasic promotion. The error value (error) in the simulation performed using the method is set at a value of 1×10^{-10} or iteration will still be if the error rate is more than the specified error value. The simulation results show that the error value of the square root of the number 3 ranges at 1.73205. The Heron method and the Newton Raphson method have the same number of iterations, which are 6 iterations, relatively less than other iterative methods. The conclusion of the research is the determination of the root of the citrate from the number 3 Heron method and Newton Raphson method provide a better computational performance of the number of iterations than the method for two and the false position.

Keywords: analytic method, nonrational square root, iterative, QBasic.

PENDAHULUAN

Sering kali permasalahan yang berkembang di berbagai bidang kehidupan dan berbagai disiplin ilmu melibatkan pemodelan matematika dalam bentuk yang tidak ideal atau rumit. Permasalahan ini biasanya diselesaikan tidak menggunakan metode biasa dan tidak melibatkan rumus-rumus aljabar yang baku atau lazim. Solusi yang didapatkan juga tidak merupakan solusi sejati (*exact solution*) melainkan solusi hampiran (*approximation solution*) Metode ini disebut dengan metode numerik. Algoritma yang dikembangkan dalam metode numeric adalah algoritma pendekatan atau hampiran maka teknik yang digunakan adalah teknik iterasi atau pengulangan proses perhitungan. Dalam teknik iterasi dilakukan perhitungan secara berulang secara terus menerus sampai didapatkan hasil yang menghampiri nilai eksak. Selisih kecil antara nilai hampiran dan nilai eksak disebut eror atau galat (Hutagalung, 2017).

Satu di antara aplikasi metode numeric dengan teknik iterasi atau leleran adalah dalam topic persamaan nonlinier misalnya persamaan kuadrat. Akar persamaan kuadrat ditentukan dengan teknik iterasi melalui proses perhitungan berulang. Ada berapa metode dalam penyelesaian akar-akar persamaan nonlinier, di antaranya metode bagi dua, posisi palsu, iterasi, Newton-Raphson, Secant dan lainnya. (Rochmad, 2013).

Banyak penelitian yang membandingkan beberapa metode iterative dalam penyelesaian persamaan nonlinier. Beberapa penelitian tersebut adalah: (a) perbandingan tingkat kecepatan konvergensi dari metode Newton Raphson dan metode secant setelah mengaplikasikan metode Aiken's dalam perhitungan akar pangkat tiga (Wulan, Sukarti & Zulkarnaen, 2016), (b) perbandingan keefesienan metode newton Raphson, metode secant dan metode Bisection dalam mengestimasi *implied volatilities* saham (Rahayuni, Dharmawan & Harini, 2016), (c) perbandingan metode barisan Fibonacci dan metode regula-falsi persamaan kuadrat dalam menentukan nilai perbandingan emas (Endaryono, 2018).

Pada pembahasan metode iterative dalam penyelesaian persamaan nonlinier, mahasiswa atau peserta belajar selain memahami langkah dan hasil tiap iterative melalui perhitungan manual juga perlu kiranya memahami proses iterif melalui pemograman atau *coding*. Satu di antara aplikasi pemograman yang dapat dilakukan adalah melalui pemograman QBasic.

Tulisan ini membahas penentuan akar bilangan bulat nonkuadrat sempurna yaitu akar kuadrat bilangan 3 menggunakan metode numeric dengan teknik iterative. Pembahasan meliputi karakteristik komputasi dalam jumlah iterasi pada metode Heron, bagi dua, posisi palsu dan metode Newton Raphson. Untuk tujuan ini dilakukan eksperimen melalui simulasi dari algoritma yang dibuat menggunakan aplikasi Qbasic dengan spesifikasi *latest version qbasic 1.1 latest and requirements for Windows XP/Vista/Windows7/Windows8/Windows 10*. Diharapkan tulisan ini dapat menambah wawasan para dosen, guru, mahasiswa atau peminat bidang matematika tentang komputasi khususnya karakteristik komputasi dan pemograman.

METODE PENELITIAN

Pembahasan tentang karakteristik komputasi penentuan akar kuadrat nonkuadrat sempurna dalam tulisan ini adalah penentuan akar kuadrat bilangan 3. Metode

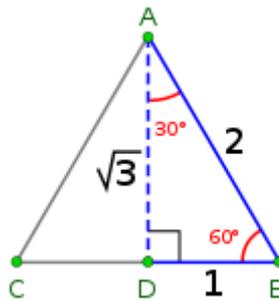
iterative yang digunakan adalah metode Heron, metode bagi dua, posisi palsu dan metode Newton Raphson.

Akar Kuadrat Bilangan 3

Akar kuadrat dari 3 dikenal sebagai konstanta Theodorus. Nama Theodorus merupakan seorang tokoh dari Kirene yang membuktikan bahwa bilangan akar kuadrat 3 adalah irasional. Nilai akar kuadrat dari 3 dengan enam puluh digit pertama dari ekspansi desimalnya adalah:

1.73205 08075 68877 29352 74463 41505 87236 69428 05253 81038 06280 5580... (Wells, 1997)

Akar kuadrat dari 3 sering kita jumpai dalam hitungan trigonometri seperti sinus $60^\circ = 1/2 \sqrt{3}$, cosinus $30^\circ = 1/2 \sqrt{3}$ tangen $30^\circ = 1/3 \sqrt{3}$ dan lain-lain. Nilai akar kuadrat 3 dapat dicari misalnya melalui sebuah segitiga sama sisi yang tentu sudut dalamnya seluruhnya bernilai 60° . Jika segitiga tersebut mempunyai panjang sisi 2, maka tinggi segitiga tersebut adalah akar tiga.



Gambar 1. Nilai akar kuadrat 3 dari segitiga sama sisi dengan panjang sisi 2

Nilai dari akar kuadrat tiga juga dapat dicari melalui persamaan kudarat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan nilai $a = 1$, $b = 0$ dan $c = -3$. Ditulis:

$$x^2 - 3 = 0 \quad (1)$$

Dan untuk mendapatkan secara eksak nilai akar tiga dari persamaan (1) dapat dilakukan melalui beberapa metode iterasi.

Metode Heron

Perhitungan atau komputasi untuk mencari akar bilangan secara iterasi pertama kali dilakukan oleh seorang filsuf Yunani kuno dari Iskandariyah bernama Heron. Metode ini dikenal dengan nama metode Babilonia atau metode Heron. Metode ini memiliki algoritma sebagai berikut: (a) untuk menentukan x , akar kuadrat dari bilangan real k dimulakan dengan tebakan sembarang x ; (b) ganti x selanjutnya dengan rata-rata x dan k/x yaitu $x_{i+1} = (x_i + (k/x_i))/2$; (c) ulangi langkah ini hingga nilai x cukup dekat dengan nilai yang diharapkan (Dellajustina & Martins, 2014).

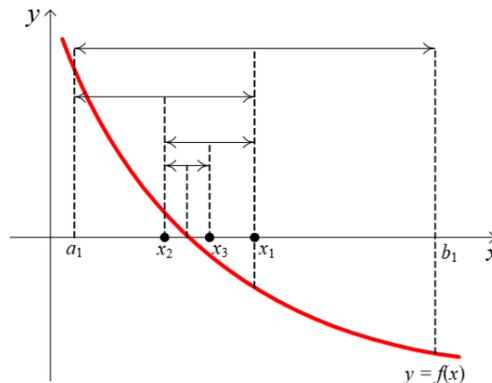
Persamaan matematis metode Heron dapat ditulis:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{p}{x_n}}{2} \quad (2)$$

Algoritma dari metode Heron mempunyai langkah-langkah: (a) input p adalah nilai akar yang dicari yaitu $p = 3$; (b) input x_n adalah tebakan awal akar kuadrat p , yaitu $x_n = 1$; (c) nilai x_n selanjutnya adalah sesuai persamaan (2); (d) ulangi langkah (b) dan (c) sampai didapatkan nilai konvergen.

Metode Bagi Dua

Metode bagi dua didasari dari teorema nilai antara, teorema Bolzano dan teorema nilai rata-rata. (Yuliza, 2013). Metode ini mendasarkan pemahaman bahwa jika fungsi kontinu pada interval tertutup antara p dan q atau $[p, q]$ sedemikian hingga perkalian fungsi a dan fungsi b negative, atau ditulis $f(p).f(q) < 0$, maka setidaknya ada satu akar fungsi pada selang $[p, q]$.



Gambar 2. Ilustrasi grafis Metode Bagi Dua

Untuk menghampiri akar tersebut maka dicari titik tengahnya, yaitu:

$$x = \frac{p + q}{2} \quad (3)$$

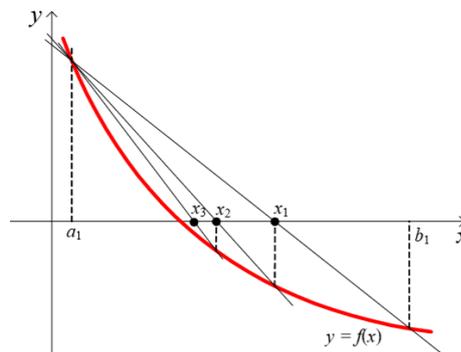
Titik tengah akan membagi interval $[p, q]$ menjadi dua buah subinterval sama panjang, yaitu $[p, x]$ dan $[x, q]$. Jika $f(p).f(x) < 0$ maka menurut Teorema Bolzano, interval $[p, x]$ memuat akar dari $f(x) = 0$ dan selanjutnya $x = q$. Sebaliknya, jika $f(x).f(q) < 0$ maka interval $[x, q]$ memuat akar dari $f(x) = 0$ dan $x = p$ sehingga diperoleh interval baru $[p, q]$. Proses diulangi hingga diperoleh nilai akar yang sesuai dengan kriteria penghentian iterasi yang ditetapkan. (Jumiasari, Bahri & Ginting, 2016).

Algoritma dari metode bagi dua mempunyai langkah-langkah: (a) input batas bawah p_n dan batas atas q_n , yaitu $p_n = 1$ dan $q_n = 2$; (b) nilai tengah adalah sesuai

pada persamaan (3); (c) jika $f(p_n).f(x_n) < 0$, maka $p_{n+1} = p_n$, $q_{n+1} = x_n$; (d) jika $f(p_n).f(x_n) > 0$, maka $p_{n+1} = x_n$, $q_{n+1} = q_n$; (e) ulangi langkah (b) sampai (d) sehingga didapatkan nilai konvergen atau jika $f(p_n).f(x_n) = 0$; (f) looping berhenti.

Metode Posisi Palsu

Ide dasar metode posisi palsu adalah kemiringan dan selisih tinggi dari dua titik batas interval. Suatu fungsi kontinu di $[a, b]$, dan hasil perkalian nilai $f(a)$ dengan nilai $f(b)$ negatif, ditulis $f(a).f(b) < 0$ terdapat sedikitnya satu titik yang merupakan akar persamaan fungsi (Nugroho, 2009).



Gambar 3. Ilustrasi grafis metode posisi palsu

Garis yang melalui titik $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ mempunyai persamaan:

$$y - f(a_n) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x - a_n)$$

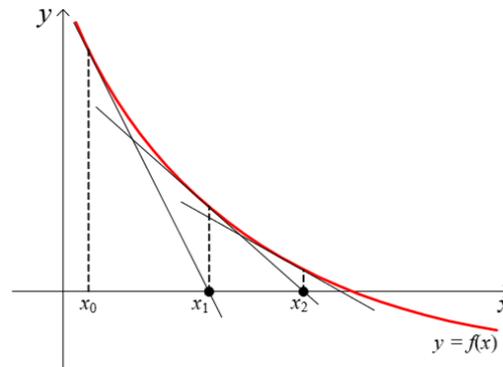
Jika garis memotong sumbu x yaitu pada $y = 0$, maka akan diperoleh titik absis yang merupakan nilai hampiran akar, yaitu:

$$x_n = a_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} f(a_n) \quad (4)$$

Algoritma metode posisi palsu mempunyai langkah-langkah: (a) input batas bawah a_n dan batas atas b_n , yaitu $a_n = 1$ dan $b_n = 2$; (b) cari nilai $f(a_n)$ dan $f(b_n)$; (c) nilai hampiran x_n adalah sesuai pada persamaan (4); (d) $a_n = x_n$ dan cari nilai $f(a_n)$ serta perhatikan bahwa nilai b_n dan $f(b_n)$ selalu tetap; (e) ulangi langkah (c) dan (d) sehingga didapatkan nilai konvergen; (f) looping berhenti.

Metode Newton Raphson

Ide dari metode Newton Raphson adalah menghitung akar yang merupakan titik potong antara sumbu x dengan garis singgung pada kurva di titik $(x_n, f(x_n))$. Kemiringan kurva di titik tersebut adalah $f'(x_n)$ (Luknanto, 2001).



Gambar 4. Ilustrasi grafis metode Newton Raphson

Dalam gambar, dapat dipahami bahwa garis singgung di titik $(x_n, f(x_n))$ mempunyai persamaan:

$$y - f(x) = f'(x)(x - x_n)$$

selanjutnya:

$$(x - x_n) = \frac{y - f(x)}{f'(x)}$$

$$x_n = x - \frac{y - f(x)}{f'(x)}$$

Dengan mengambil nilai $y = 0$ maka diperoleh hampiran dari nilai akar fungsi adalah:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x) \neq 0 \quad (5)$$

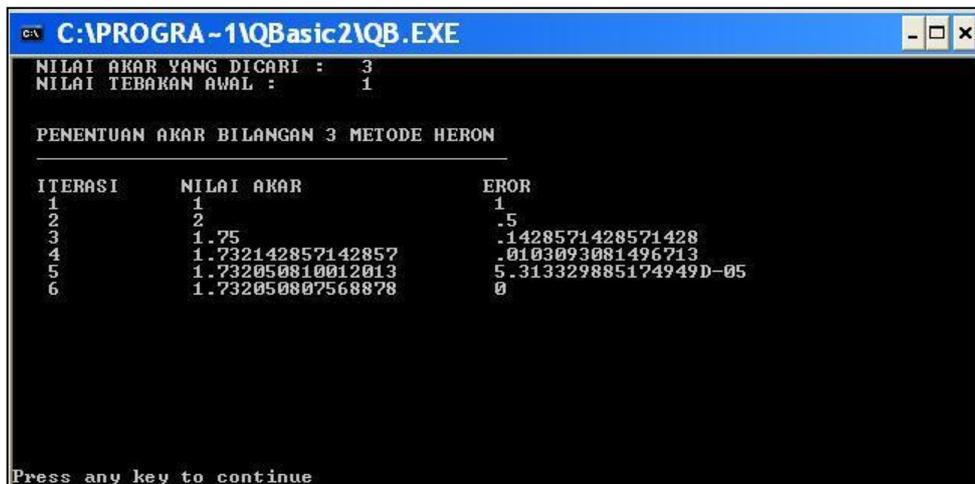
Algoritma dari metode Newton Raphson mempunyai langkah-langkah: (a) input x , yaitu nilai perkiraan akar dari 3 yaitu $x = 1$; (b) nilai x selanjutnya atau x_{n+1} sesuai persamaan (5); (c) $x_n = x_{n+1}$; (d) ulangi langkah (b) dan (c) sampai didapatkan nilai konvergen; (e) looping berhenti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Eksperimen penelitian dilakukan dengan simulasi berdasarkan algoritma yang dibuat menggunakan aplikasi pemrograman QBasic dan mendapatkan hasil sebagai berikut.

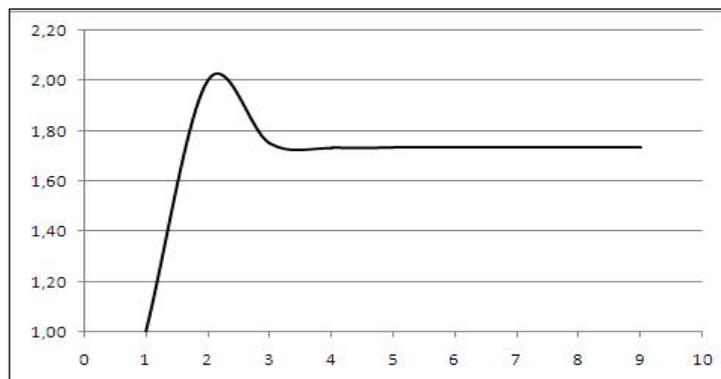
Hasil Simulasi Metode Heron

Hasil simulasi penentuan akar bilangan 3 menggunakan metode Heron mendapatkan hasil akar sebesar 1,732050807568878 pada iterasi yang ke-6 sebagaimana pada Gambar 5.



Gambar 5. Hasil Simulasi Penentuan Akar Kuadrat Bilangan 3 Metode Heron

Sedangkan grafik hasil simulasi tersebut terdapat pada gambar 6.



Gambar 6. Grafik Hasil Penentuan Akar Kuadrat Bilangan 3 Metode Heron

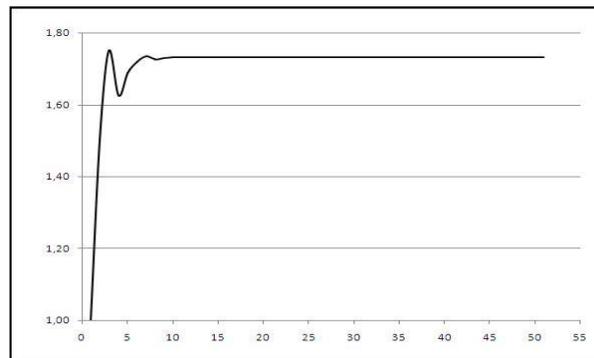
Hasil Simulasi Metode Bagi Dua

Hasil simulasi penentuan akar bilangan 3 menggunakan metode bagi dua mendapatkan hasil akar sebesar 1,732050836086273 pada iterasi yang ke-26 sebagaimana pada Gambar 7.



Gambar 7. Hasil Simulasi Penentuan Akar Kuadrat Bilangan 3 Metode Bagi Dua

Sedangkan grafik hasil simulasi tersebut terdapat pada Gambar 8.



Gambar 8. Grafik Hasil Penentuan Akar Kuadrat Bilangan 3 Metode Bagi Dua

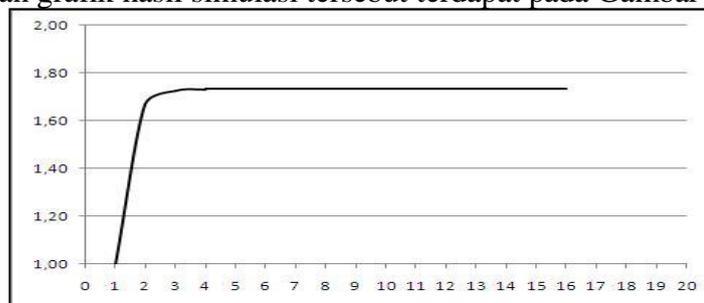
Hasil Simulasi Metode Posisi Palsu

Hasil simulasi penentuan akar bilangan 3 menggunakan metode posisi palsu mendapatkan hasil akar sebesar 1,7320508805336913 pada iterasi yang ke-9 sebagaimana pada Gambar 9.

C:\PROGRA~1\QBASIC\QB.EXE		
NILAI AKAR YANG DICARI : 3		
NILAI BATAS BAWAH : 1		
NILAI BATAS ATAS : 2		
PENENTUAN AKAR BILANGAN 3 METODE POSISI PALSU		
ITERASI	NILAI AKAR	EROR
1	1	1
2	1.666666666666667	.2000000286102302
3	1.722222225056026	3.508775441160009D-02
4	1.731707318547996	2.56081699424243D-03
5	1.732026145035698	1.840420535404075D-04
6	1.732049033645138	1.321451283872513D-05
7	1.732050676954221	9.635572993801435D-07
8	1.732050796778071	6.88255166473439D-08
9	1.732050805336913	0
Press any key to continue		

Gambar 9. Hasil Simulasi Penentuan Akar Kuadrat Bilangan 3 Metode Posisi Palsu

Sedangkan grafik hasil simulasi tersebut terdapat pada Gambar 10.



Gambar 10. Grafik Hasil Penentuan Akar Kuadrat Bilangan 3 Metode Posisi Palsu

Hasil Simulasi Metode Newton Raphson

Hasil simulasi penentuan akar bilangan 3 menggunakan metode posisi palsu mendapatkan hasil akar sebesar 1,7320508805336913 pada iterasi yang ke-9 sebagaimana pada Gambar 11.



```

C:\PROGRA~1\QBASIC\QB.EXE
NILAI AKAR YANG DICARI : 3
NILAI TEBAKAN : 1

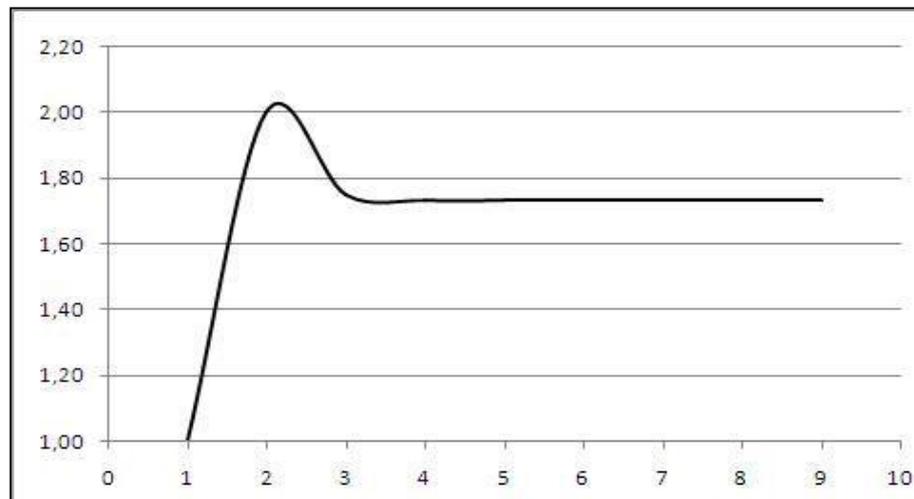
PENENTUAN AKAR BILANGAN 3 METODE NEWTON RAPHSON

ITERASI   NILAI AKAR   EROR
1         1           1
2         2           .5
3         1.75       .1428571428571428
4         1.732142857142857 .0103093081496713
5         1.7320508810011328 5.313329885174949D-05
6         1.7320508807568878 0

Press any key to continue
  
```

Gambar 11. Hasil Simulasi Penentuan Akar Kuadrat Bilangan 3 Metode Newton Raphson

Sedangkan grafik hasil simulasi tersebut terdapat pada Gambar 12.



Gambar 12. Grafik Hasil Penentuan Akar Kuadrat Bilangan 3 Metode Newton Raphson

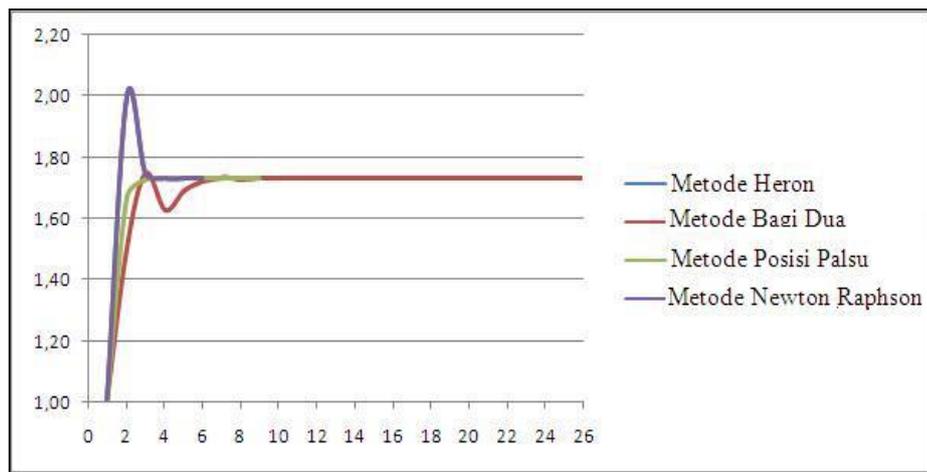
Pembandingan Hasil Pencapaian Nilai Tiap Iterasi Pada Tiap Metode

Dari hasil pencapaian nilai akar kuadrat bilangan 3 tiap metode, selanjutnya dilakukan rekap hasil keseluruhan guna memudahkan pembandingan hasil tiap iterasi pada setiap metode.

Tabel 1. Hasil Pencapaian Nilai Akar Kuadrat Bilangan 3 Tiap Iterasi dari Metode Heron, Bagi Dua, Posisi Palsu dan Newton Raphson

Iterasi	Metode Iteratif			
	Heron	Bagi Dua	Posisi Palsu	Newton Raphson
1	1	1	1	1
2	2	1,5	1,666666666666667	2
3	1,75	1,75	1,727272725056026	1,75
4	1,732142857142857	1,625	1,731707318547996	1,732142857142857
5	1,732050810012013	1,6875	1,732026145035698	1,732050810011328
6	1,732050807568878	1,71875	1,732049033645138	1,732050807568878
7		1,734375	1,732050676954221	
8		1,7265625	1,732050796778071	
9		1,73046875	1,732050805336913	
10		1,732421875		
11		1,7314453125		
12		1,73193359375		
13		1,732177734375		
14		1,7320556640625		
15		1,73199462890625		
16		1,732025146484375		
17		1,732040405273437		
18		1,732048034667969		
19		1,732051849365234		
20		1,732049942016602		
21		1,732050895690918		
22		1,73205041885376		
23		1,732050657272339		
24		1,732050776481628		
25		1,732050836086273		
26		1,732050836086273		

Sedangkan grafik hasil dari pencapaian nilai akar bilangan 3 tiap iterasi pada tiap metode dapat dilihat pada gambar 13.



Gambar 13. Grafik Hasil Pencapaian Akar Kuadrat Bilangan 3 tiap Iterasi pada setiap Metode

Dari gambar 13, menunjukkan empat metode iteratif dalam mencapai nilai akar kudarta bilangan tiga. Terlihat bahwa metode Heron dan metode Newton Raphson mencapai kondisi konvergensi pada iterasi yang lebih sedikit dan pencapaian nilai

akar kuadrat bilangan tiga pada metode bagi dua memerlukan iterasi yang lebih banyak.

KESIMPULAN

Eksperimen penelitian melalui simulasi menggunakan aplikasi pemograman QBasic pada tingkat kesalahan atau eror 1×10^{-15} didapat nilai akar kuadrat dari 3 masing-masing metode adalah: (a) metode Heron yaitu 1,732050807568878 pada iterasi 6; (b) metode bagi dua yaitu 1,732050836086273 pada iterasi 26; (c) metode posisi palsu yaitu 1,732050805336913 pada iterasi 9; dan (d) metode Newton Raphson yaitu 1,732050807568878 pada iterasi 6. Eksperimen menunjukkan bahwa penggunaan metode Heron dan metode Newton Raphson dalam pencapaian nilai akar kuadrat bilangan tiga relatif lebih baik dalam jumlah iterasi dari metode bagi dua dan metode posisi palsu.

Simulasi pemograman dalam menentukan nilai akar kuadrat bilangan 3 menggunakan pemograman QBasic dapat digunakan untuk memberikan pemahaman kepada peserta belajar atau mahasiswa tentang hasil perhitungan dari setiap langkah iterasi. Kelemahan aplikasi pemograman dengan QBasic dalam perhitungan ini adalah terbatasnya digit yang dihasilkan, yaitu hanya sampai 15 digit di belakang koma. Sebagai saran, perlu dicoba penghitungan dengan aplikasi pemograman yang lebih teliti dan cepat namun aplikasi tersebut lebih sederhana dan luas dalam penggunaan serta mudah didapatkan.

REFERENSI

- Dellajustina, F. J., & Martins, L. C. (2014). The Hidden Geometry of the Babylonian Square Root Method. *Applied Mathematics*, 5(19), 2982.
- Endaryono, E. (2018). Perbandingan Kinerja Metode Barisan Fibonacci dan Regula False dalam Penentuan Perbandingan emas. *Faktor Exacta Jurnal Ilmiah Teknologi*, 11(4), 322-331.
- Hutagalung, S. N. (2017). Pemahaman Metode Numerik (Studi Kasus Metode Newton Raphson) menggunakan Pemograman matlab. *Jurnal Teknologi Informasi (JurTI)*, 1(1), 95-100.
- Iqbal W, M., Djuriatno, W., & Aswin, M. (2014). Implementasi Algoritma Pencarian Akar Kuadrat Bilangan Positif. *Jurnal Mahasiswa TEUB*, 2(2), 1-5.
- Jumiasari, E., Bahri, S., & Ginting, B. (2016). Penyelesaian Persamaan Nonlinier dengan Metode Modifikasi Bagi Dua. *Jurnal matematika UNAND*, 4(1), 68-75.
- Luknanto, D. (2001). *Metode Numerik: Bahan kuliah Metoda Numerik Jurusan Teknik Sipil*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- Nugroho, D.B. (2009). *Metode Numerik: Diktat Kuliah Program Studi matematika*. Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana.
- Rahayuni, I. A. E., Dharmawan, K., & Harini, L. P. I. (2016). Perbandingan Keefesienan metode Newton Raphson, metode Secant dan metode Bisection dalam mengestimasi Implied Volatilities Saham. *E-Jurnal Matematika*, 5(1), 1-6.
- Rochmad, R. (2013). Aplikasi Metode Newton-Raphson untuk menghampiri Solusi persamaan Nonlinier. *Jurnal MIPA*, 36(2), 193-200.

- Wells, D. (1997). *The Penguin dictionary of curious and interesting numbers*. Penguin.
- Wulan, E. R., Sukarti, S. M., & Zulkarnaen, D. (2016). Perbandingan Tingkat Kecepatan Konvergensi dari Metode Newton Raphson dan Metode Secant Setelah Mengaplikasikan Metode Aiken's dalam Perhitungan Akar Pangkat Tiga. *Jurnal Matematika Integratif*, 12(1), 35-42.
- Yuliza, E. (2013). Penggunaan Metode Bagi Dua Terboboti untuk Mencari Akar-akar Suatu Persamaan. *Jurnal Penelitian Sains*, 16(1A), 161011-161016.